Expressões fracionárias

Objetivos de aprendizagem

- Domínio de uma expressão algébrica.
- Simplificação de expressões racionais.
- Operações com expressões racionais.
- Expressões racionais compostas.

Domínio de uma expressão algébrica

Um quociente de duas expressões algébricas, além de ser outra expressão algébrica, é uma **expressão fracionária** ou simplesmente uma fração. Se o quociente pode ser escrito como a razão de dois polinômios, então a expressão fracionária é uma **expressão racional**. A seguir temos um exemplo de cada uma dessas expressões:

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

Vemos que o primeiro exemplo é uma expressão fracionária, mas não é uma expressão racional. O segundo é tanto uma expressão fracionária como racional.

Diferentemente dos polinômios que são definidos para todos os números reais, algumas expressões algébricas não são definidas para alguns números reais. O conjunto dos números reais para os quais uma expressão algébrica é definida é o **domínio da expressão algébrica**.

EXEMPLO 1 Verificação do domínio de expressões algébricas

(a) $3x^2 - x + 5$ **(b)** $\sqrt{x - 1}$ **(c)** $\dfrac{x}{x - 2}$

SOLUÇÃO

(a) O domínio de $3x^2 - x + 5$, como de qualquer polinômio, é o conjunto de todos os números reais.

(b) Como a raiz quadrada está definida para números reais não-negativos, então devemos ter $x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Em notação de intervalo, o domínio é $[1, +\infty[$.

(c) Como não existe divisão por zero, então devemos ter $x - 2 \neq 0$, isto é, $x \neq 2$. O domínio é todo o conjunto dos números reais, com exceção do 2.

Simplificação de expressões racionais

Sejam u, v e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Podemos escrever expressões racionais na forma mais simples usando

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$$

contanto que z seja diferente de zero. Isto requer uma fatoração do numerador e denominador em fatores primos. Quando todos os fatores comuns do numerador e denominador forem removidos, a expressão racional (ou número racional) está na **forma reduzida**.

EXEMPLO 2 Simplificação de expressões racionais

Escreva $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida. Verifique o domínio

SOLUÇÃO

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)}$$

$$= \frac{x}{x + 3}, \quad x \neq 3 \text{ e } x \neq -3$$

Vemos que x não pode ser -3, mas incluímos a condição $x \neq 3$ porque 3 não está no domínio da expressão racional original. Dessa forma, não deve estar também no domínio da expressão racional final, que é o conjunto dos números reais, exceto 3 e -3.

Duas expressões racionais são **equivalentes** se elas têm o mesmo domínio e os mesmos valores para todos os números no domínio. A forma reduzida de uma expressão racional precisa ter o mesmo domínio que a expressão racional original. Esta é a razão que nos levou a adicionar a restrição $x \neq 3$ para a forma reduzida no Exemplo 2.

Operações com expressões racionais

Duas frações são **iguais**, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{z}{w}$ se, e somente se, $uw = vz$.

Operações com frações

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Todos os denominadores são considerados como diferentes de zero.

Operação	**Exemplo**
1. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{v} = \dfrac{u + w}{v}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{2 + 5}{3} = \dfrac{7}{3}$
2. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{z} = \dfrac{uz + vw}{vz}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{22}{15}$
3. $\dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{w}{z} = \dfrac{uw}{vz}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$
4. $\dfrac{u}{v} \div \dfrac{w}{z} = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{uz}{vw}$	$\dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

5. Para subtração, substitua "+" por "−" em 1 e 2.

EXEMPLO 3 Multiplicação e divisão de expressões racionais

(a) $\dfrac{(2x^2 + 11x - 21)}{(x^3 + 2x^2 + 4x)} \cdot \dfrac{(x^3 - 8)}{(x^2 + 5x - 14)}$

$$= \frac{(2x - 3)\cancel{(x + 7)}}{x\cancel{(x^2 + 2x + 4)}} \cdot \frac{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 + 2x + 4)}}{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x + 7)}} = \frac{2x - 3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -7, \quad x \neq 0$$

(b) $$\frac{(x^3+1)}{(x^2-x-2)} \div \frac{(x^2-x+1)}{(x^2-4x+4)}$$

$$= \frac{(x^3+1)(x^2-4x+4)}{(x^2-x-2)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2-x+1)}(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2-x+1)}}$$

$$= x-2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$$

EXEMPLO 4 Soma de expressões racionais

$$\frac{x}{3x-2} + \frac{3}{x-5} = \frac{x(x-5)+3(3x-2)}{(3x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2-5x+9x-6}{(3x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2+4x-6}{(3x-2)(x-5)}$$

OBSERVE UM EXEMPLO

Vale observar que a expressão x^2+4x-6 é um polinômio primo; não é possível fatorá-lo.

Se os denominadores das frações têm fatores comuns, então podemos encontrar o mínimo múltiplo comum desses polimônios. O **mínimo múltiplo comum** é o produto de todos os fatores primos nos denominadores, onde cada fator está elevado à maior potência encontrada em qualquer um dos denominadores.

EXEMPLO 5 Redução ao mesmo denominador (mínimo múltiplo comum)

Escreva a seguinte expressão como uma fração na forma reduzida

$$\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2-4}$$

SOLUÇÃO

Os denominadores fatorados são $x(x-2)$, x e $(x-2)(x+2)$, respectivamente. O menor denominador comum é $x(x-2)(x+2)$.

$$\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2-4}$$

$$= \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(x+2)+(x-2)(x+2)-3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2x+4+x^2-4-3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2-x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}, \quad x \neq 0,\ x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$$

Expressões racionais compostas

Às vezes uma expressão algébrica complicada precisa ser transformada anteriormente para uma forma mais fácil de ser trabalhada. Uma **fração composta** (às vezes chamada **fração complexa**), na qual os numeradores e denominadores podem eles mesmos conter frações, é tal como no exemplo a seguir. Uma maneira de simplificar uma fração composta é escrever numerador e denominador como frações simples e, então, inverter e multiplicar. Se a fração toma a forma de uma expressão racional, então escrevemos a expressão na forma reduzida ou na forma mais simples.

EXEMPLO 6 Simplificação de uma fração composta

$$\frac{3-\dfrac{7}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x-3}} = \frac{\dfrac{3(x+2)-7}{x+2}}{\dfrac{(x-3)-1}{x-3}}$$

$$= \frac{\dfrac{3x-1}{x+2}}{\dfrac{x-4}{x-3}}$$

$$= \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}, \quad x \neq 3,\ x \neq -2 \text{ e } x \neq 4$$

Uma segunda maneira de simplificar uma fração composta é multiplicar o numerador e o denominador pelo mínimo múltiplo comum de todas as frações existentes na expressão, como ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Simplificação de outra fração composta

Use o mínimo múltiplo comum para simplificar a fração composta

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$$

SOLUÇÃO

O menor denominador comum das quatro frações no numerador e denominador é a^2b^2.

$$\frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} = \frac{\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)a^2b^2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{ab^2 - a^2b}$$

$$= \frac{(b + a)(b - a)}{ab(b - a)}$$

$$= \frac{b + a}{ab}, \quad a \neq b$$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 8, reescreva como uma única fração.

1. $\dfrac{5}{9} + \dfrac{10}{9}$

2. $\dfrac{17}{32} - \dfrac{9}{32}$

3. $\dfrac{20}{21} \cdot \dfrac{9}{22}$

4. $\dfrac{33}{25} \cdot \dfrac{20}{77}$

5. $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5}$

6. $\dfrac{9}{4} \div \dfrac{15}{10}$

7. $\dfrac{1}{14} + \dfrac{4}{15} - \dfrac{5}{21}$

8. $\dfrac{1}{6} + \dfrac{6}{35} - \dfrac{4}{15}$

Nos exercícios 9 a 18, encontre o domínio da expressão algébrica. Os exercícios 15 e 16 trazem restrição da expressão racional original.

9. $5x^2 - 3x - 7$

10. $2x - 5$

11. $\sqrt{x - 4}$

12. $\dfrac{2}{\sqrt{x + 3}}$

13. $\dfrac{2x + 1}{x^2 + 3x}$

14. $\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$

15. $\dfrac{x}{x - 1}, \quad x \neq 2$

16. $\dfrac{3x - 1}{x - 2}, \quad x \neq 0$

17. $x^2 + x^{-1}$

18. $x(x + 1)^{-2}$

Nos exercícios 19 a 26, encontre o numerador ou o denominador que está faltando, de modo que as duas expressões racionais sejam equivalentes.

19. $\dfrac{2}{3x} = \dfrac{?}{12x^3}$

20. $\dfrac{5}{2y} = \dfrac{15y}{?}$

21. $\dfrac{x - 4}{x} = \dfrac{x^2 - 4x}{?}$

22. $\dfrac{x}{x + 2} = \dfrac{?}{x^2 - 4}$

23. $\dfrac{x + 3}{x - 2} = \dfrac{?}{x^2 + 2x - 8}$

24. $\dfrac{x - 4}{x + 5} = \dfrac{x^2 - x - 12}{?}$

25. $\dfrac{x^2 - 3x}{?} = \dfrac{x - 3}{x^2 + 2x}$

26. $\dfrac{?}{x^2 - 9} = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 3}$

Nos exercícios 27 a 32, considere a fração original e sua forma reduzida do exemplo especificado. Explique por que a restrição dada é necessária na forma reduzida.

27. Exemplo 3a, $x \neq 2$, $x \neq -7$.

28. Exemplo 3b, $x \neq -1$, $x \neq 2$.

29. Exemplo 4, nenhum.

30. Exemplo 5, $x \neq 0$.

31. Exemplo 6, $x \neq 3$.

32. Exemplo 7, $a \neq b$.

Nos exercícios 33 a 44, escreva a expressão na forma reduzida.

33. $\dfrac{18x^3}{15x}$

34. $\dfrac{75y^2}{9y^4}$

35. $\dfrac{x^3}{x^2 - 2x}$

36. $\dfrac{2y^2 + 6y}{4y + 12}$

37. $\dfrac{z^2 - 3z}{9 - z^2}$

38. $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12}$

39. $\dfrac{y^2 - y - 30}{y^2 - 3y - 18}$

40. $\dfrac{y^3 + 4y^2 - 21y}{y^2 - 49}$

41. $\dfrac{8z^3 - 1}{2z^2 + 5z - 3}$

42. $\dfrac{2z^3 + 6z^2 + 18z}{z^3 - 27}$

43. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^3 + 2x^2}$

44. $\dfrac{y^2 + 3y}{y^3 + 3y^2 - 5y - 15}$

Nos exercícios 45 a 62, simplifique.

45. $\dfrac{3}{x - 1} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{9}$

46. $\dfrac{x + 3}{7} \cdot \dfrac{14}{2x + 6}$

47. $\dfrac{x + 3}{x - 1} \cdot \dfrac{1 - x}{x^2 - 9}$

48. $\dfrac{18x^2 - 3x}{3xy} \cdot \dfrac{12y^2}{6x - 1}$

49. $\dfrac{x^3 - 1}{2x^2} \cdot \dfrac{4x}{x^2 + x + 1}$

50. $\dfrac{y^3 + 2y^2 + 4y}{y^3 + 2y^2} \cdot \dfrac{y^2 - 4}{y^3 - 8}$

51. $\dfrac{2y^2 + 9y - 5}{y^2 - 25} \cdot \dfrac{y - 5}{2y^2 - y}$

52. $\dfrac{y^2 + 8y + 16}{3y^2 - y - 2} \cdot \dfrac{3y^2 + 2y}{y + 4}$

53. $\dfrac{1}{2x} \div \dfrac{1}{4}$

54. $\dfrac{4x}{y} \div \dfrac{8y}{x}$

55. $\dfrac{x^2 - 3x}{14y} \div \dfrac{2xy}{3y^2}$

56. $\dfrac{7x - 7y}{4y} \div \dfrac{14x - 14y}{3y}$

57. $\dfrac{\dfrac{2x^2y}{(x - 3)^2}}{\dfrac{8xy}{x - 3}}$

58. $\dfrac{\dfrac{x^2 - y^2}{2xy}}{\dfrac{y^2 - x^2}{4x^2y}}$

59. $\dfrac{2x + 1}{x + 5} - \dfrac{3}{x + 5}$

60. $\dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{x + 1}{x - 2}$

61. $\dfrac{3}{x^2 + 3x} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2 - 9}$

62. $\dfrac{5}{x^2 + x - 6} - \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{4}{x^2 - 4}$

Nos exercícios 63 a 70, simplifique a fração composta.

63. $\dfrac{\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}}$

64. $\dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}$

65. $\dfrac{2x + \dfrac{13x - 3}{x - 4}}{2x + \dfrac{x + 3}{x - 4}}$

66. $\dfrac{2 - \dfrac{13}{x + 5}}{2 + \dfrac{3}{x - 3}}$

67. $\dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

68. $\dfrac{\dfrac{x + h}{x + h + 2} - \dfrac{x}{x + 2}}{h}$

69. $\dfrac{\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}}$

Nos exercícios 71 a 74, escreva com expoentes positivos e simplifique.

71. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(x + y)^{-1}$

72. $\dfrac{(x + y)^{-1}}{(x - y)^{-1}}$

73. $x^{-1} + y^{-1}$

74. $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$